Die Bewegung von Ladungsträgern in nicht-homogenen Feldern

Von W. BEZ und K.-H. HÖCKER

Aus dem Institut für theoretische und angewandte Physik der Technischen Hochschule Stuttgart

(Z. Naturforschg. 9a, 64—66 [1954]; eingegangen am 18. November 1953)

Es werden zwei Differentialgleichungen abgeleitet, die gestatten, bei vorgegebenem Potentialverlauf die Geschwindigkeit der Ladungsträger in Feldrichtung und die in ungeordneter Bewegung steckende Energie zu berechnen.

Anläßlich des Versuches, Anoden- und Kathodenfall eines Lichtbogens im Rahmen einer kinetischen Theorie zu verstehen, mußten wir uns die Frage vorlegen, wie die Bewegung der Elektronen und Ionen in den für dieses Problem charakteristischen, starken inhomogenen Feldern zu beschreiben ist. Da dieser Aufgabe eine grundsätzliche Bedeutung zukommt, wollen wir deren Behandlung aus dem Problem des Lichtbogens[1] herauslösen und hier gesondert darstellen.

Bekanntlich kommt man bei konstanten Feldern mit Hilfe des Begriffs der Beweglichkeiten relativ einfach zum Ziel. Hier ist das Verfahren wegen der vom Ort abhängigen Energieaufnahme und -abgabe naturgemäß komplizierter. Wir setzen voraus, daß der Raum, über den sich das Feld erstreckt, viele freie Weglängen der Ladungsträger umfaßt. Wir rechnen eindimensional; die Bewegung negativer Teilchen erfolgt in Richtung der Koordinatenachse. Um die Darstellung möglichst anschaulich zu halten, wollen wir unter den Ladungsträgern einfach geladene Ionen mit der gleichen Masse wie die Neutralteilchen verstehen (die sich bei obiger Festsetzung also gegen die Koordinatenrichtung bewegen). Es möge nur eine Sorte Gasatome und demzufolge auch nur eine Sorte Ionen vorhanden sein. Auf mehrere Teilchensorten und höhere Ionisationsstufen ist unschwer zu verallgemeinern.

§ 1. Die Fortschreitungsgeschwindigkeit

Um die Bewegung der Ladungsträger einigermaßen richtig modellmäßig zu erfassen, denken wir an einen unter Reibung erfolgenden Vorgang. Wir definieren eine beschleunigende und eine verzögernde Kraft. Die erste ist das elektrische Feld. Die zweite hat ihre Ursache in den Zusammenstößen der Ionen. Wir stellen diesen Prozeß analog zur Reibung der klassischen Mechanik kontinuierlich dar. Die übliche Berechnung der Stoßwahrscheinlichkeit entspricht dem:

$$W_{\mathrm{St}} = \mathrm{d}\sigma/\lambda_{\mathrm{i}}. \tag{1}$$

$\mathrm{d}\sigma$ ist der zurückgelegte Weg $= v_{\mathrm{B}}\,\mathrm{d}t$; v_{B} ist die Bahngeschwindigkeit. Da das Ion die Fortschreitungsstrecke $\mathrm{d}x$ in der Zeit $\mathrm{d}t = \mathrm{d}x/v$ (v Fortschreitungsgeschwindigkeit in Richtung des elektrischen Feldes) durchläuft, ist $\mathrm{d}\sigma$ in (1) zugunsten von $\mathrm{d}x$ zu eliminieren.

Man erhält als Stoßwahrscheinlichkeit im Intervall $\mathrm{d}x$:

$$W_{\mathrm{St}} = f\,\frac{\mathrm{d}x}{\lambda_{\mathrm{i}}}, \tag{2}$$

wobei

$$f = v_{\mathrm{B}}/v \tag{3}$$

ist. f ist der Umwegfaktor. Ist die Feldenergie groß gegen die thermische Energie der Ladungsträger, wird $v_{\mathrm{B}} \approx v$ und die Stoßwahrscheinlichkeit $W_{\mathrm{St}} \approx \mathrm{d}x/\lambda_{\mathrm{i}}$. Wenn dagegen die thermische Energie der Ladungsträger größer als die in Fortschreitungsgeschwindigkeit umgesetzte Feldenergie ist, wird W_{St} nach Gl. (2) größer als $\mathrm{d}x/\lambda_{\mathrm{i}}$. Die Stoßwahrscheinlichkeit ist somit im allgemeinen eine Funktion des Verhältnisses von thermischer, ungeordneter Bewegung und der geordneten Bewegung in Richtung des Feldes. Sobald man es mit inhomogenen Feldern zu tun hat, ergibt sich so eine Ortsabhängigkeit der Stoßwahrscheinlichkeit.

Die infolge der Stöße abgegebene Feldenergie bestimmt sich aus der Energie, die dem Ion im Moment des Stoßes innewohnt. Sei diese $E_{\mathrm{F}} = 1/2\, M w^2$, so bleibt dem Ion nach dem Stoß im Mittel $1/2\, E_{\mathrm{F}}$, wenn die Stoßpartner gleiche Masse aufweisen, und wenn man sie als elastische Kugeln auffassen darf. Diese Energie entspricht aber nicht der Bewegung in Feldrichtung, vielmehr entfällt darauf nur ein

[1] W. Bez u. K.-H. Höcker, Z. Naturforschg. 9a, [1954], im Druck.

Teil. Dieser Bruchteil ist aus dem Impulssatz zu entnehmen, nach dem dem Ion im Mittel $1/2\,M w$ als Impuls in Feldrichtung verbleibt. Dem entspricht eine kinetische Energie von $1/4\,E_F$. Also gehen $3/4\,E_F$ beim Stoß verloren[2]. Davon geht der größere Teil ($1/2\,E_F$) auf den Stoßpartner über, während $1/4\,E_F$ der Bewegungskomponente senkrecht zur Feldrichtung zuzuordnen ist. Somit ist die im Intervall $\mathrm{d}x$ abgegebene Energie:

$$\text{abgegebene Energie} = \frac{3}{4}\,\frac{1}{2} M w^2 f \frac{\mathrm{d}x}{\lambda_i}\,. \qquad (4)$$

Wir möchten nun die Fortschreitungsgeschwindigkeit w, die dem Ion im Moment des Stoßes zukommt, durch die mittlere Fortschreitungsgeschwindigkeit v ausdrücken[3]. Nach den Gesetzen des freien Falls wäre

$$w = 2v\,. \qquad (5)$$

Wir möchten aus Gründen, die gleich deutlich werden, den Proportionalitätsfaktor vorläufig unbestimmt lassen und setzen

$$w = k v\,. \qquad (6)$$

Den Zahlenfaktor k wollen wir aus der Forderung bestimmen, daß unsere herzuleitende Bewegungsgleichung für den Grenzfall konstanter Felder die übliche Definition der Beweglichkeit liefert.

Zu der gesuchten Gleichung kommen wir, wenn wir der abgegebenen Energie [Gl. (4)] die im gleichen Intervall aufgenommene Energie gegenüberstellen:

$$\text{aufgenommene Energie} = -e\,\mathrm{d}U\,. \qquad (7)$$

Die Änderung der kinetischen Durchschnittsenergie wird dann sein:

$$\mathrm{d}\left(\frac{M}{2} v^2\right) = -e\,\mathrm{d}U + \frac{3}{4} k^2 \frac{M}{2} v^2 f \frac{\mathrm{d}x}{\lambda_i}\,. \qquad (8)$$

Bei den Vorzeichen in dieser Gleichung ist zu beachten, daß die Bewegung der Ionen entgegen der Richtung unserer Koordinatenachse erfolgt.

Für den üblicherweise mit Beweglichkeiten berechneten Fall homogener Felder ist die linke Seite von (8) Null. Die rechte Seite muß dann mit $f = v_B/v$ auf die Definition der Beweglichkeit führen:

$$v = b_i E\,, \qquad b_i = a \frac{e \lambda_i}{M v_B} \qquad \text{mit } \frac{1}{2} \le a \le 1\,. \qquad (9)$$

Das ergibt sich, wenn man

$$k^2 = \frac{8}{3a} \qquad (10)$$

setzt. Für $a = 2/3$ wird $k = 2$. Für Werte in der Umgebung von $2/3$, die innerhalb des Intervalls $1/2 \le a \le 1$ durchaus gebräuchlich sind, ist (5) nur angenähert erfüllt.

Schreibt man die Formel (8) für beliebige Massen $M \neq M_{\text{Atom}}$, so tritt dort an die Stelle des Faktors $3/4$ der Ausdruck $1 - M^2/(M + M_{\text{Atom}})^2$. Fordert man die exakte Gültigkeit der Gl. (5), so wird a kleiner. Im Grenzfall $M \ll M_{\text{Atom}}$, der bei Elektronen realisiert ist, würde $a = 1/2$.

Wenden wir Gl. (8) auf den anderen Grenzfall der Bewegung, den freien Fall, an, so erhält man, wie sich leicht verifizieren läßt, aus Gl. (8) für $\lambda_i \to \infty$ die gewöhnliche Fallformel. Gl. (8) interpoliert also zwischen den beiden Grenzfällen und beschreibt Bewegungen, die eine Mischung von freiem Fall und Drift darstellen.

§ 2. Die thermische Geschwindigkeit

Bei homogenen Feldern befindet sich die Temperatur der Ladungsträger im Gleichgewicht mit der Temperatur der neutralen Teilchen: Die Feldenergie wird benutzt, um die neutralen Teilchen auf einer gewissen Temperatur aufgeheizt zu erhalten. Die Temperatur der Ladungsträger liegt dabei an jeder Stelle um einen festen Betrag über der räumlich konstanten Temperatur der Neutralteilchen. Bei sehr schwachen Feldern kann diese Differenz vernachlässigt werden.

Bei inhomogenen Feldern werden die Temperaturen von geladenen und neutralen Teilchen ortsabhängig. Um das zu erfassen, stellen wir eine Differentialgleichung für die thermische Energie der Ionen auf. Die Änderung der thermischen Energie der Ionen besteht

[2] Dieser Ausdruck gilt nur näherungsweise. Genau genommen steht dort die Energie, die über die thermische Energie hinausgeht: $\frac{3}{4} \cdot (E^{\text{Ion}}_{\text{Gesamt}} - E^{\text{Ion}}_{\text{therm}})$. Denkt man sich $E^{\text{Ion}}_{\text{Gesamt}}$ additiv aus Feldenergie und thermischer Energie zusammengesetzt, so entsteht der obige Ausdruck.

[3] In der Literatur wird dieser Unterschied im allgemeinen nicht gemacht, s. z. B. W. Weizel, Lehrbuch der theoretischen Physik, Berlin 1950, S. 1300. Das hat gelegentlich Konsequenzen, etwa in den Grenzwerten der Umwegfaktoren bei starken Feldern, für die sich dort der Wert 2 ergibt, während wir den plausiblerweise zu erwartenden Wert 1 erhalten. — Wir möchten im Interesse der Klarheit die Unterscheidung zwischen mittlerer Durchschnittsgeschwindigkeit während der freien Flugstrecke und der mittleren Geschwindigkeit am Ende der freien Flugstrecke einführen.

1. in der Übertragung von ungeordneter Ionenbewegung auf Gasatome. Es wird beim Stoß im Mittel die Hälfte des die Energie der Gasatome übersteigenden thermischen Energiebetrages übertragen.

$$\frac{1}{2}\left(\frac{M}{2}\,w_{\mathrm{B}}^2-\frac{M}{2}\,v_{\mathrm{th,\,G}}^2\right)=\frac{1}{2}\left(\frac{M}{2}\,w^2+\frac{M}{2}\,(v_{\mathrm{th}}^2-v_{\mathrm{th,\,G}}^2)\right). \qquad (11)$$

Die Bahngeschwindigkeit im Moment des Stoßes heiße w_{B}, die mittlere Bahngeschwindigkeit zwischen zwei Stößen ist v_{B}. Die Bahngeschwindigkeit ist durch Feldgeschwindigkeit und thermische Geschwindigkeit bestimmt. Wir setzen folgenden Zusammenhang an:

$$w_{\mathrm{B}}^2=w^2+v_{\mathrm{th}}^2 \qquad (12\,\mathrm{a})$$

und

$$v_{\mathrm{B}}^2=v^2+v_{\mathrm{th}}^2, \qquad (12\,\mathrm{b})$$

wobei v_{th} die thermische Geschwindigkeit der Ionen bedeutet, $v_{\mathrm{th,\,G}}$ ist entsprechend die thermische Geschwindigkeit des neutralen Gases. Der zweite Summand auf der rechten Seite von (11) stellt die von uns gesuchte, bei einem Stoß abgegebene thermische Energie der Ionen dar. Der erste Summand $\frac{1}{2}\frac{M}{2}\,w^2$ gibt die dem Ion im Mittel entzogene Feldenergie.

Die Änderung der thermischen Energie der Ionen im Anodenfall besteht

2. in der Übertragung von Feldenergie auf ungeordnete Bewegung. Die Höhe dieses Bruchteils ist nur schematisch angebbar. Sehen wir diejenige Energie, die auf die Bewegungskomponente senkrecht zur Feldrichtung entfällt, als maßgeblich an, so ist die zugeführte Energie

$$\frac{1}{4}E_{\mathrm{F}}\,W_{\mathrm{St}}=\frac{1}{4}k^2\,\frac{M}{2}\,v^2 f\,\frac{\mathrm{d}\,x}{\lambda_{\mathrm{i}}}=\frac{2}{3\,a}\,\frac{M}{2}\,v^2 f\,\frac{\mathrm{d}x}{\lambda_{\mathrm{i}}}. \qquad (13)$$

Die Änderung der thermischen Energie mit dem Ort wird durch die Differentialgleichung

$$-\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\,x}\left(\frac{M}{2}\,v_{\mathrm{th}}^2\right)=\frac{2}{3\,a}\,\frac{M}{2}\,v^2\,\frac{f}{\lambda_{\mathrm{i}}}-\frac{1}{2}\,\frac{M}{2}\,(v_{\mathrm{th}}^2-v_{\mathrm{th,\,G}}^2)\,\frac{f}{\lambda_{\mathrm{i}}} \qquad (14)$$

beschrieben. Damit haben wir für Fortschreitungsgeschwindigkeit v und thermische Geschwindigkeit v_{th} die zwei simultanen Differentialgleichungen (8) und (14) aufgestellt, die neben der expliziten Kopplung auch noch die über $f=v_{\mathrm{B}}/v$ mit $v^2{}_{\mathrm{B}}=v^2+v_{\mathrm{th}}^2$ aufweisen.

Sind $U\,(x)$ und $v_{\mathrm{th,\,G}}$ bekannt, so können nun die mittlere Feldgeschwindigkeit und die thermische Energie der Ionen berechnet werden. Bezüglich des negativen Vorzeichens auf der linken Seite der Gl. (14) vergleiche man die Bemerkung nach Gl. (8).

Für den Fall, daß verschiedene Massen beteiligt sind, tritt in Gl. (11) an die Stelle des Faktors 1/2 der allgemeine Ausdruck $2\,M\,M_{\mathrm{A}}/(M+M_{\mathrm{A}})^2$; in Gl. (13) kommt an die Stelle des Faktors 1/4 die Differenz

$$\frac{2\,M M_{\mathrm{A}}}{(M+M_{\mathrm{A}})^2}-\frac{M^2}{(M+M_{\mathrm{A}})^2}\,.$$

Ist $\mathrm{d}v_{\mathrm{th}}^2/\mathrm{d}x=0$, so ergibt sich die Gleichung

$$\frac{16}{9}\,v^2=v_{\mathrm{th}}^2-v_{\mathrm{th,\,G}}^2\,, \qquad (15)$$

die einen Zusammenhang zwischen thermischer Energie des Gases, thermischer Energie der Ionen und Feldenergie der Ionen bei homogenen Feldern gibt. Unter Bedingungen, wie sie in der Säule der meisten Lichtbögen vorliegen, ist $v^2 \ll v_{\mathrm{th,\,G}}^2$, so daß thermische Energie von Gasatomen und Ladungsträgern praktisch übereinstimmen. In anderen Fällen gestattet Gl. (15), die Differenz mühelos anzugeben.

Wir werden die Gleichungen bei der Diskussion des Anodenfalls klassischer Lichtbögen verwenden.